

Übungsblatt 4

Kongruenzgruppen

13. Indizes von Kongruenzgruppen

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\Gamma_1(N)$ ein Normalteiler von $\Gamma_0(N)$, aber nicht von Γ_1 ist. Ist $\Gamma_0(N)$ ein Normalteiler von Γ_1 ?
- (b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Indizes von $[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)]$, $[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)]$, $[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)]$ und $[\Gamma_1 : \Gamma_0(N)]$.

14. Verhältnis von $\Gamma(N)$ zu $\Gamma_0(N^2)$.

(4 Punkte) Bestimmen Sie einen Isomorphismus von $\Gamma(N)$ nach einer Untergruppe von $\Gamma_0(N^2)$ mit Index $\phi(N)$ in $\Gamma_0(N^2)$. Insbesondere sind dann $\Gamma(2)$ und $\Gamma_0(4)$ isomorph. Hier ist ϕ die sogenannte Eulersche Totientfunktion: $\phi(N)$ ist gleich der Anzahl von positiven ganzen Zahlen, die kleiner als N und teilerfremd zu N sind.

15. Fundamentalbereich von Untergruppen.

- (a) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass Γ und Γ' zwei Untergruppen mit endlichem Index in Γ_1 sind, und dass $\Gamma = \alpha\Gamma'\alpha^{-1}$ für ein $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$. Wenn \mathcal{F}' ein Fundamentalbereich von Γ' ist, zeigen Sie, dass $\alpha\mathcal{F}'$ ein Fundamentalbereich von Γ ist.
- (b) (2 Punkte) Zeichnen Sie einen Fundamentalbereich von $\Gamma_0(4)$.

16. Kongruenzgruppen der Stufe 2.

(4 Punkte) Beschreiben Sie alle Kongruenzgruppen Γ' der Stufe 2, d.h. alle Untergruppen, die zwischen Γ_1 und $\Gamma(2)$ liegen: $\Gamma(2) \subset \Gamma' \subset \Gamma_1$. Finden Sie einen einfach zusammenhängenden Fundamentalbereich für jedes solche Γ' . Nehmen Sie dazu einen passenden Anteil des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}(2)$ von $\Gamma(2)$, der in der Vorlesung gegeben wurde.

Abgabetermin: Freitag, 13.11.2009 um 10:00 Uhr.